

Leçon 159 : Formes linéaires et dualité. Exemples et applications.

[Amr] : *Calcul différentiel*, Mohammed El Amrani

[Gou] : *Algèbre et probabilité*, Xavier Gourdon

[Li] : *Cours d'analyse fonctionnelle*, Daniel Li

[Man-Mne] : *Réduction des endomorphismes*, Roger Mansuy, Rached Mneimné

[Rom] : *Mathématiques pour l'agrégation*, Jean-Étienne Rombaldi

[Rou] : *Petit guide de calcul différentiel*, François Rouvière

[Szp] : *Mathématiques Algèbre L3*, Aviva Szpirglas

I Partie A - Définitions et dualité

I.1 Formes linéaire, hyperplans [Rom] [Gou]

■ **Déf 1 (Forme linéaire) :**

■ **Ex 2 (Coordonnées) :**

■ **Ex 3 (Évaluation en un point) :**

■ **Ex 4 (Trace) :**

■ **Déf 5 (Hyperplan) :**

Rem 6 : Deux formes définissent le même hyperplan ssi elles sont liées.

Rem 7 : Équation d'un hyperplan.

■ **Ex 8 :** Noyau de la trace + base.

■ **Thm 9 (Supplémentaire d'un hyperplan) :**

■ **Prop 10 (Dimension d'un hyperplan) :**

■ **Ex 11 :** Polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$. La forme linéaire associée est la dérivation $(n-1)$ -ième évaluée en 0.

I.2 Espace dual [Rom] [Gou]

■ **Déf 12 (Espace dual) :**

■ **Thm 13 (Dimension du dual) :**

■ **Ex 14 (Polynôme de Taylor) :**

Rem 15 : Caractérisation de la base duale.

■ **Prop 16 (Changement de base) :**

I.3 Bidual et base antéduale [Rom] [Gou]

■ **Thm 17 (Existence d'un antédual) :**

■ **Déf 18 (Base antéduale) :**

■ **Ex 19 (Polynôme de Lagrange) :**

■ **Déf 20 (Bidual) :**

■ **Thm 21 (Isomorphisme canonique) :**

Rem 22 : Lien entre base antéduale et base duale de la base duale.

II Partie B - Orthogonalité et transposée

II.1 Orthogonalité [Rom] [Gou]

■ **Déf 23 (Orthogonal) :**

■ **Ex 24 (Exemples triviaux) :**

■ **Ex 25 (Base duale) :**

■ **Thm 26 (Premières propriétés) :**

■ **Thm 27 (Propriétés importantes) :**

App 28 (Équations d'un sev) :

App 29 (Sev de dim r) :

II.2 Transposition [Rom] [Gou]

■ **Déf 30 (Transposée) :**

■ **Thm 31 (Isomorphisme) :**

■ **Thm 32 (Propriétés) :**

| Prop 33 (Matrice de la transposée) :

| Prop 34 (Stabilité d'un sev) :

II.3 Jordan [Rom] [Man-Mne]

| Prop 35 (Transposée d'un nilpotent) :

 Dév 36 (Lemme 1) :

 Dév 37 (Lemme 2) :

 Dév 38 (Jordan nilpotent) :

Thm 39 (Jordan) :

App 40 (Classes de similitude) :

III Partie C - Dans les espaces euclidiens

III.1 Formes linéaires dans des espaces euclidiens [Rom] [Szp]

| Prop 41 (Représentation de Riesz) :

| Ex 42 (Trace) :

Rem 43 : Orthogonalité.

| Déf 44 (Adjoint) :

Rem 45 : Lien avec la transposée.

III.2 Hahn Banach [Szp][Li]

Thm 46 (Hahn-Banach géométrique) :

| Ex 47 : [Annexe : Faire dessin]

App 48 (Caractérisation d'une fonction convexe) :

 Dév 49 (Caractérisation de l'adhérence) :

| Déf 50 (Enveloppe convexe) :

 Dév 51 (Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$) :

IV Partie D - Du calcul différentiel [Amr][Rou]

IV.1 Différentielle

IV.2 Extrema liés